
ATENÇÃO: Não é permitido destacar as folhas

3ª Prova de MA141 — 15/06/2015

NOME: _____ Turma: _____ RA: _____.

1. (2 pt) Seja S a esfera com centro $A(1, 2, -2)$ e raio 3. Encontrar a equação de S :
 - a) Em coordenadas cartesianas.
 - b) Em coordenadas esféricas sendo a origem coincidente com o polo, o eixo polar — com o eixo Ox , e o outro eixo — coincidente com o eixo Oz .
2. (2 pt) A superfície S tem equações paramétricas

$$x = a \cos s \cos t; \quad y = b \cos s \sin t; \quad z = c \sin s, \quad s \in [0, \pi], t \in [0, 2\pi].$$

Qual a superfície S ? Escrever a equação canônica de S .

3. (2 pt) Encontrar a equação (em coordenadas cartesianas) da superfície de revolução S obtida quando a curva $c: 4x^2 + 9y^2 = 36, z = 0$, gira em torno do eixo Oy . Que tipo de superfície ela é?

4. (3 pt) Seja ℓ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x - 36 = 0.$$

- a) Identificar a cônica ℓ .
- b) Encontrar as mudanças consecutivas das coordenadas que levam ℓ à forma canônica.
- c) Encontrar a excentricidade de ℓ . Encontrar também as coordenadas dos focos e dos vértices, e as equações das assíntotas no sistema Oxy (se aplicável). Fazer um esboço do gráfico de ℓ .

5. (2 pt) Determinar a equação da superfície cilíndrica S com curva diretriz $c: x^2 - y^2 = 1, z = 0$, e retas geratrizes paralelas ao vetor $v = (0, 2, -1)$.

Incluir na prova, por favor, **todas** as “contas” feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

1- esfera com centro em $(1, 2, -2)$ raio 3
encontrar a equação em

i) coord cartesianas

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$$

$$2) \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi - 2\rho \cos \theta \sin \phi + 1 \\ (y-2)^2 &= \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - 4\rho \sin \theta \sin \phi + 4 \\ (z+2)^2 &= \rho^2 \cos^2 \phi - 4\rho \cos \phi + 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ equação

$$\rho^2 - 2\rho \cos \theta \sin \phi - 4\rho \sin \theta \sin \phi - 4\rho \cos \phi + 9 = 0$$

$$\rho = 2 \cos \theta \sin \phi + 4 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi$$

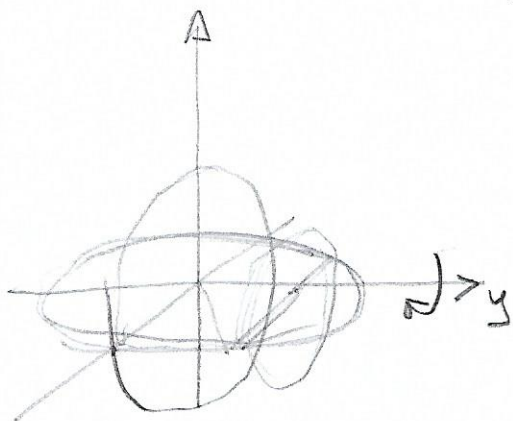
2- Se tem 3 parâmetros

$$\begin{aligned} x &= a \cos s \cos t \\ y &= b \cos s \sin t \\ z &= c \sin s \end{aligned}$$

que mp é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Elipsoide

equação cartésia $\nearrow$

- 3- Achar a equação de superfície de revolução obtida (2)
quando a curva $c: 4x^2 + 9y^2 = 36$ $z=0$ gira
em torno ao eixo Oy que tipo de superfície ela é?



$$x \leadsto \sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow$$

$$F(x, y, z) = 4(\sqrt{x^2 + z^2})^2 + 9y^2 = 36 = 0$$

$\Rightarrow$ Elipsoide

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1}$$

- 4- Seja a cônica

$$5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x - 36 = 0$$

(a) identificar a cônica

$$(a) \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = -36 < 0 \text{ hipérbole}$$

$$(b) \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \begin{cases} 9 \\ -4 \end{cases}$$

tomamos $\lambda_1 = 9$

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -4 \cos \theta + 6 \sin \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{3}{2} \sin \theta$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{9}{4} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$9x^2 - 4y^2 - [12\sqrt{13}, 0] \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0 \quad (3)$$

$$9x'^2 - 4y'^2 - 36x' + 24y' - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$9(x'^2 - 4x' + 4) - 4(y'^2 - 6y' + 9) - 36 - 36 + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{(x' - 2)^2}{2^2} - \frac{(y' - 3)^2}{3^2} = 1}$$

As sucessivas transformações são $R_\theta = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$ e

deslocamento $(2, 3)$

c) $C' = (2, 3)$, $V_1' = (4, 3)$ $V_2' = (0, 3)$
 $F_1' = (2 + \sqrt{13}, 3)$, $F_2' = (2 - \sqrt{13}, 3)$

$a=2$, $b=3$
 $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$e = \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$

Assíntotas

$$2(y' - 3) = 3(x' - 2) \Rightarrow$$

$$3x' - 2y' = 0$$

$$2(y' - 3) = -3(x' - 2)$$

$$3x' + 2y' = 12$$

No eixo Oxy

(4)

$$C = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{13}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

$$V_1 = R_\theta \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{13}} \\ \frac{17}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}; \quad V_2 = R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{\sqrt{13}} \\ \frac{9}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

$$F_1 = R_\theta \begin{bmatrix} 2+\sqrt{13} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2+\sqrt{13} \end{bmatrix}; \quad F_2 = R_\theta \begin{bmatrix} 2-\sqrt{13} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2-\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

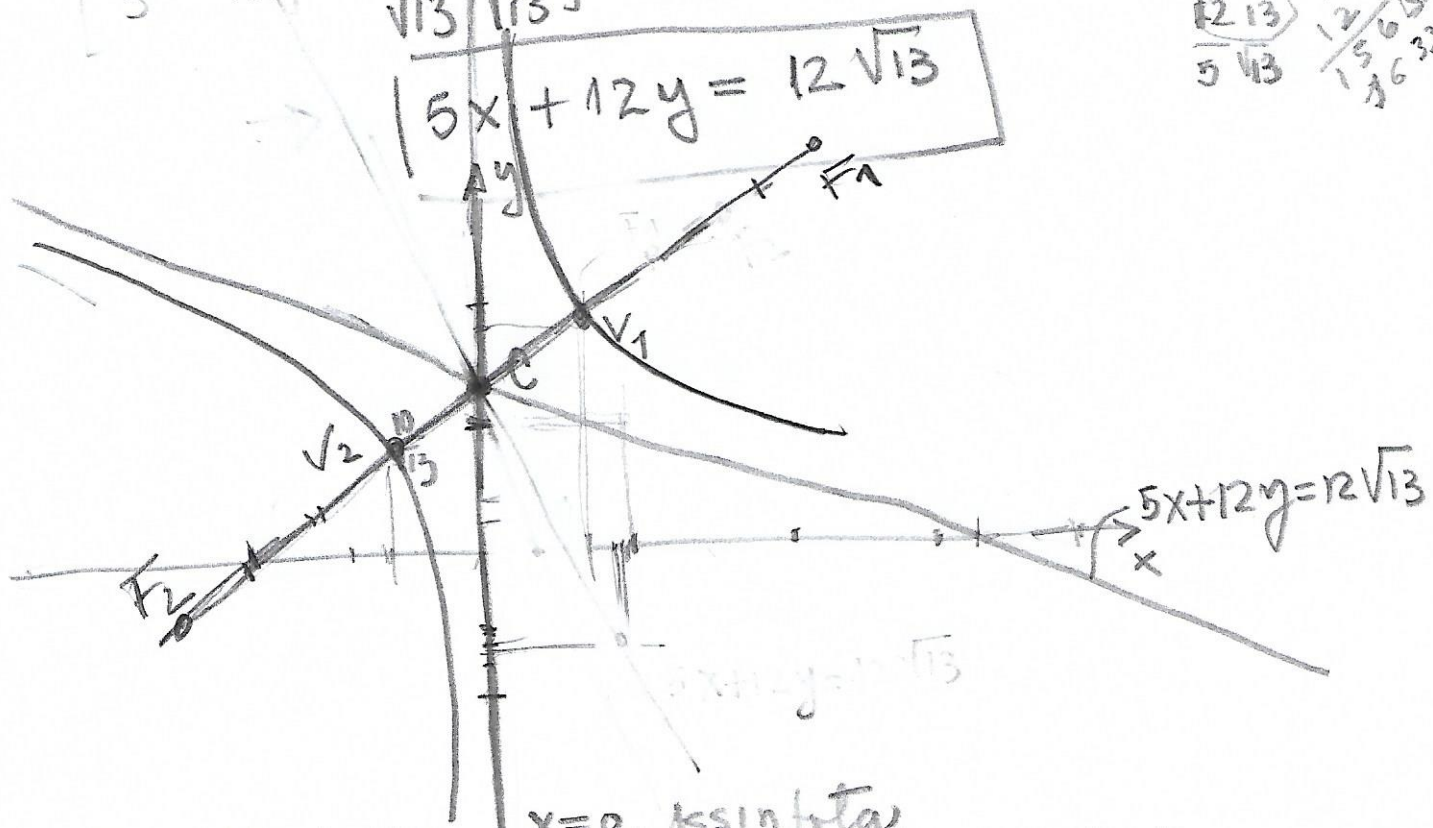
Assintotas

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{13}{\sqrt{13}} \quad x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 12 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{13}}x + \frac{12}{\sqrt{13}}y = 12$$

$$5x + 12y = 12\sqrt{13}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 13 \\ \hline 36 \\ 12 \\ \hline 156 \\ 156 \\ \hline 0 \end{array}$$



5 - curva diretriz $x^2 - y^2 = 1, z = 0$ e reta
geratriz paralela ao vetor $v = (0, 2, -1)$

5

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$v = (0, -2, 1)$$

$$F(x, y, z) = f(x - 0z, y + 2z) = x^2 - (y + 2z)^2 - 1 = 0$$
$$= x^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz - 1 = 0$$

